

# Estados Acotados del Oscilador Invertido

Juan Carlos González López  
Ingeniería Industrial  
Tecnológico de Estudios Superiores de Huixquilucan  
México, México  
juan.g.l@huixquilucan.tecnm.mx

**Abstract**—La mecánica cuántica supersimétrica de primer orden es aplicada al oscilador invertido con el fin de obtener nuevos potenciales exactamente solubles a partir de funciones de transformación polinomiales. Partiendo de estas funciones, un análisis asintótico de las densidades de probabilidad de las funciones propias de energía inicial y transformada permiten concluir que no es posible implementar una transformación supersimétrica de primer orden que conserve el espectro inicial. Sin embargo, se encuentran valores de la energía que garantizan la existencia de nuevos estados cuyas densidades de probabilidad son acotadas, pero no son de cuadrado-integrable.

**Index Terms**—mecánica cuántica supersimétrica, álgebra polinomial de Heisenberg, oscilador invertido, estados de cuadrado-integrable.

## I. INTRODUCCIÓN

En mecánica cuántica hay algunos sistemas cuya solución de problemas de valores propios puede encontrarse exactamente. Algunos sistemas físicos más conocidos son el oscilador armónico complejo (OAC) que es una extensión al plano complejo del oscilador armónico tradicional [1], el átomo de hidrógeno, el pozo  $\delta$ , la partícula libre, entre otros. Un caso especial del OAC surge cuando la frecuencia toma el valor  $\omega = i$ , conduciendo al llamado *oscilador invertido* (OI) cuyo espectro es continuo y doblemente degenerado [2], [3], además de no tener estados propios de cuadrado-integrable. Cabe mencionar que el OAC tiene espectro discreto y funciones propias de cuadrado-integrable, siendo una de las diferencias más importantes entre ambos sistemas que, matemáticamente, son similares.

En las últimas décadas la comunidad científica ha estudiado el oscilador invertido siendo un sistema puramente dispersivo. Sus aplicaciones se presentan en tunelamiento de barreras, tiempo de decaimiento alrededor de un punto de equilibrio inestable [4]–[9], procesos de dispersión química [10] y cosmología [11].

Por otro lado, la mecánica cuántica supersimétrica (SUSY) ha mostrado ser una herramienta eficiente que permite generar nuevos potenciales isoenergéticos a partir de un potencial inicial conocido. Esta técnica se ha aplicado a varios sistemas cuyos hamiltonianos pueden ser hermitianos o no-hermitianos cuyo espectro difiere en un número finito de niveles de energía. La generación de potenciales exactamente solubles del OI no se ha explorado completamente, por lo que en este artículo se realiza un análisis ilustrativo del formalismo SUSY más simple. La clasificación de los nuevos socios SUSY de primer orden del OI es ilimitada debido a la aparición de las

funciones hipergeométricas confluentes en la solución general de la ecuación de Schrödinger asociada al sistema, además de considerar la naturaleza compleja de las “energías”.

El artículo está organizado de la siguiente manera: en la Sección II se presenta el formalismo supersimétrico de primer orden, así como las relaciones que definen las álgebras polinomiales de Heisenberg. La solución al problema de valores propios y el álgebra que rige al OI se presentan en la Sección III. En la Sección IV, se consideran las soluciones polinomiales del OI debido a que serán importantes e ilustrativas en la generación de socios SUSY. Los valores de la energía para los que se garantiza la existencia de una cota en las densidades de probabilidad de los estados propios iniciales y los correspondientes transformados se estudian en la Sección V realizándose un análisis asintótico de dichas densidades de probabilidad. Finalmente, las conclusiones se presentan en la Sección VI.

## II. MECÁNICA CUÁNTICA SUPERSIMÉTRICA DE PRIMER ORDEN Y ÁLGEBRAS POLINOMIALES DE HEISENBERG

Sean  $H_0$  y  $H_1$  dos Hamiltonianos del tipo Schrödinger en unidades naturales  $\hbar = m = 1$ :

$$H_j = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V_j(x), \quad j = 0, 1. \quad (1)$$

Estos Hamiltonianos se entrelazan como [12]

$$H_1 A_1^+ = A_1^+ H_0, \quad H_0 A_1^- = A_1^- H_1, \quad (2)$$

donde  $A_1^\pm$  son dos operadores diferenciales de primer orden

$$A_1^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \mp \frac{d}{dx} + \beta_1 \right), \quad (3)$$

siendo  $\beta_1 =: \beta(x, \varepsilon_1)$  una función compleja a determinar. De la naturaleza compleja de  $\beta_1$ , se deduce que los operadores de entrelazamiento  $A_1^\pm$  no son adjuntos entre sí:  $(A_1^+)^\dagger \neq A_1^-$ .

La notación utilizada para la derivada con respecto a  $x$  será  $(\cdot)' \equiv d(\cdot)/dx$  a menos que se indique lo contrario. Las siguientes ecuaciones deben cumplirse para satisfacer las relaciones (1) a (3):

$$\beta_1' + \beta_1^2 = 2[V_0(x) - \varepsilon_1], \quad (4a)$$

$$V_1(x) = V_0(x) - \beta_1'. \quad (4b)$$

El parámetro complejo  $\varepsilon_1$  es la llamada *energía de factorización*. A partir de (4b), es posible encontrar una

expresión para el nuevo potencial  $V_1$  si se puede encontrar una solución de la ecuación de Riccati (4a).

Sea  $u_1 = u(x, \varepsilon_1)$  una función compleja tal que

$$\beta_1 = (\ln u_1)' = \frac{u_1'}{u_1}, \quad (5)$$

entonces, la ecuación de Riccati (4a) es transformada en una ecuación del tipo Schrödinger en la nueva función:

$$H_0 u_1 = \varepsilon_1 u_1. \quad (6)$$

Esta expresión muestra que  $u_1$  es una solución formal de la ecuación estacionaria de Schrödinger asociada a la “energía compleja”  $\varepsilon_1$  y se llama *función semilla*. Por otra parte, el carácter complejo de  $u_1$  oculta la aparición de singularidades en el nuevo potencial (4b) debido a que las partes real e imaginaria de  $u_1$  difícilmente serán canceladas en el mismo punto. Sustituyendo (5) en (4b) arroja

$$V_1(x) = V_0(x) - (\ln u_1)''. \quad (7)$$

Si  $\psi_n(x)$  son las funciones propias normalizadas de  $H_0$  cada una asociada a un valor propio  $E_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , a partir de las relaciones de entrelazamiento (2) se obtienen las funciones propias  $\Psi_n(x)$  de  $H_1$ ,

$$\Psi_n(x) \propto A_1^+ \psi_n(x) \propto \frac{W(u_1, \psi_n)}{u_1}, \quad (8a)$$

$$H_1 \Psi_n(x) = E_n \Psi_n(x), \quad (8b)$$

donde  $W(u_1, \psi_n)$  es el Wronskiano de  $u_1$  y  $\psi_n$ . Notar que las antiguas y nuevas funciones propias comparten el mismo conjunto de valores propios  $E_n$ .

La función de onda

$$\Psi_{\varepsilon_1}(x) \propto \frac{1}{u_1} \quad (9)$$

es aniquilada por  $A_1^-$  cumpliendo

$$H_1 \Psi_{\varepsilon_1} = \varepsilon_1 \Psi_{\varepsilon_1}. \quad (10)$$

Si  $\Psi_{\varepsilon_1}$  es normalizable, el espectro del nuevo Hamiltoniano será

$$\text{Sp}(H_1) = \{E_n, \varepsilon_1; n = 0, 1, 2, \dots\}. \quad (11)$$

Para esto, es necesario que la función semilla no esté acotada y su densidad de probabilidad  $|\Psi_{\varepsilon_1}(x)|^2 \propto |u_1|^{-2}$  tienda a cero en los extremos de su dominio. La Fig. 1 muestra esquemáticamente la transformación SUSY de primer orden (1-SUSY).

Por otro lado, los sistemas descritos por álgebras polinomiales de Heisenberg (APH) tienen tres generadores: el Hamiltoniano  $H$  y dos operadores diferenciales de  $m$ -ésimo orden,  $\mathcal{L}_m^\pm$ . Una APH de  $(m-1)$ -ésimo grado es definida por las relaciones [13]:

$$[H, \mathcal{L}_m^\pm] = \pm \mathcal{L}_m^\pm, \quad (12a)$$

$$[\mathcal{L}_m^-, \mathcal{L}_m^+] = \mathcal{N}_m(H+1) - \mathcal{N}_m(H) \equiv \mathcal{P}_{m-1}(H), \quad (12b)$$

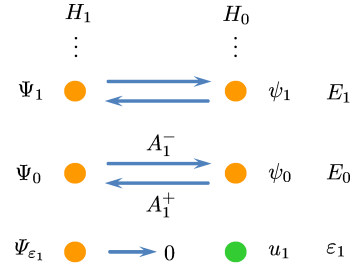


Fig. 1. Representación abstracta de una transformación 1-SUSY. El nuevo espectro de  $H_1$  difiere en un número finito de niveles de energía del de  $H_0$ .

en donde  $\mathcal{P}_{m-1}$  es un polinomio en  $H$  de  $(m-1)$ -ésimo grado,  $\mathcal{N}_m$  es una generalización del operador número de  $m$ -ésimo orden factorizado como

$$\mathcal{N}_m := \mathcal{L}_m^+ \mathcal{L}_m^- = \prod_{j=1}^m (H - \mathcal{E}_j). \quad (13)$$

Los términos  $\mathcal{E}_j$  son las energías asociadas a los *estados extremales*  $\psi_{\mathcal{E}_j}$  los cuales son aniquilados por el operador de descenso  $\mathcal{L}_m^-$ . Estos estados satisfacen la ecuación estacionaria de Schrödinger:

$$H \psi_{\mathcal{E}_j} = \mathcal{E}_j \psi_{\mathcal{E}_j}. \quad (14)$$

Estas álgebras han sido estudiadas en los últimos años y, en particular, las APH de segundo y tercer grado tienen una conexión con ecuaciones diferenciales del tipo Painlevé IV y V, respectivamente [13], [14]. El formalismo SUSY y la APH se pueden combinar para generar soluciones exactas a estas ecuaciones, lo cual es un trabajo arduo a través de métodos numéricos.

### III. OSCILADOR INVERTIDO

Si en el Hamiltoniano del oscilador armónico se fija la frecuencia como la unidad imaginaria, se obtiene el Hamiltoniano del oscilador invertido,

$$h = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} - \frac{x^2}{2}. \quad (15)$$

A continuación, se analizan algunos socios SUSY del OI generados a partir de funciones de transformación polinomiales que surgen al resolver la ecuación estacionaria de Schrödinger asociada al sistema.

#### A. Problema de valores propios

Para generar socios SUSY de primer orden, debe encontrarse la solución general de la ecuación de Schrödinger para cualquier energía de factorización  $\varepsilon_1 \in \mathbb{C}$ ,

$$h u_1 = \left( -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} - \frac{x^2}{2} \right) u_1 = \varepsilon_1 u_1. \quad (16)$$

La solución general de (16) es [15]

$$u_1 = u(x, \varepsilon_1) = e^{-i \frac{x^2}{2}} \left[ {}_1F_1 \left( \frac{1}{4} + i \frac{\varepsilon_1}{2}, \frac{1}{2}; i x^2 \right) + C x {}_1F_1 \left( \frac{3}{4} + i \frac{\varepsilon_1}{2}, \frac{3}{2}; i x^2 \right) \right], \quad C \in \mathbb{C}, \quad (17)$$

donde  ${}_1F_1$  es la función hipergeométrica confluyente. Esta función tiene una conexión con varias funciones especiales ampliamente conocidas, lo cual se consigue dando valores específicos a la energía de factorización. De hecho, en la Subsección III-C se ilustra una de estas clasificaciones cuando la función de transformación se elige como una solución polinomial del OI para generar socios 1-SUSY.

Para energías de factorización reales, es posible construir funciones de onda describiendo partículas incidentes desde la derecha ( $u_+$ ) o desde la izquierda ( $u_-$ ) [3] de la barrera de potencial. En el caso complejo, las funciones análogas a las descritas se obtienen cuando en (17) la constante se elige como

$$C = C_{\pm} = \pm \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4} + i\frac{\varepsilon_1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4} + i\frac{\varepsilon_1}{2}\right)} e^{i\frac{\pi}{4}} + \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4} - i\frac{\varepsilon_1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4} - i\frac{\varepsilon_1}{2}\right)} e^{-i\frac{\pi}{4}} \right]. \quad (18)$$

Notar que  $u_{\pm}$  son funciones simétricas entre sí, es decir,  $u_-(x) = u_+(-x)$  lo cual se muestra en las Figs. 2-4.

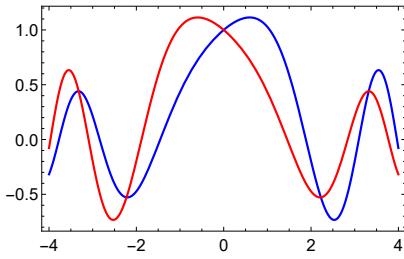


Fig. 2. Parte real de las funciones simétricas  $u_+$  (azul) y  $u_-$  (rojo) para  $\varepsilon_1 = \frac{2+i}{10}$ .

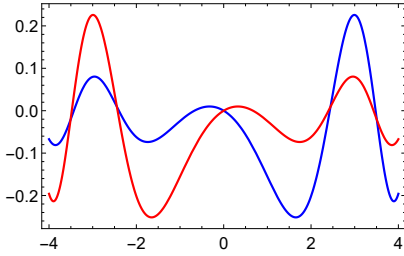


Fig. 3. Parte imaginaria de las funciones simétricas  $u_+$  (azul) y  $u_-$  (rojo) para  $\varepsilon_1 = \frac{2+i}{10}$ .

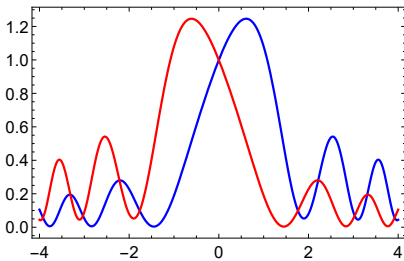


Fig. 4. Densidades de probabilidad no-normalizadas de las funciones simétricas  $u_+$  (azul) y  $u_-$  (rojo) para  $\varepsilon_1 = \frac{2+i}{10}$ .

## B. Estructura algebraica

El tradicional oscilador armónico satisface la bien conocida álgebra de Heisenberg-Weyl [16] correspondiente a una APH de grado cero. El OI obedece la misma álgebra, donde los operadores de escalera naturales de primer orden están dados por

$$a_i^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \mp \frac{d}{dx} + ix \right), \quad (a_i^+)^{\dagger} \neq a_i^-. \quad (19)$$

Con estos operadores, el álgebra del OI se realiza como

$$[\mathcal{H}_0, a_i^{\pm}] = \pm a_i^{\pm}, \quad (20a)$$

$$[a_i^-, a_i^+] = i, \quad (20b)$$

donde el Hamiltoniano del OI ha sido reescalado como

$$\mathcal{H}_0 = \frac{h}{i}, \quad (21)$$

y puede factorizarse según

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{i} \left( a_i^+ a_i^- + \frac{i}{2} \right) = \frac{1}{i} \left( a_i^- a_i^+ - \frac{i}{2} \right). \quad (22)$$

Las últimas factorizaciones son una forma alterna para obtener las soluciones polinomiales del OI.

Si se implementan transformaciones SUSY de órdenes superiores al OI, una APH de segundo orden rige los sistemas transformados que tienen una conexión con la ecuación diferencial de segundo orden no-lineal del tipo Painlevé IV sujeto a las condiciones del teorema de reducción [17] y, así, generar soluciones de esta ecuación.

## C. Soluciones polinomiales del problema de valores propios

Para energías de factorización tales que

$$\varepsilon_1 := E_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) i, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (23a)$$

puede mostrarse que la solución general de (17) se reduce a

$$u(x, E_n) = C_n e^{-i\frac{x^2}{2}} H_n(\sqrt{i}x), \quad C_n \in \mathbb{C}, \quad (23b)$$

siendo  $H_n$  el polinomio de Hermite de  $n$ -ésimo grado. Igualmente, si

$$\varepsilon_1 = E'_n = - \left( n + \frac{1}{2} \right) i, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (24a)$$

la expresión (17) es ahora

$$u(x, E'_n) = D_n e^{-i\frac{x^2}{2}} H_n(\sqrt{i^3}x), \quad D_n \in \mathbb{C}. \quad (24b)$$

Las energías (23b) y (24b) son complejas conjugadas. Además, son soluciones polinomiales de la ecuación de Schrödinger para el OI. Sin embargo, estas soluciones no son de cuadrado-integrable, por lo que las energías  $E_n$  y  $E'_n$  no pertenecen al espectro del sistema.

#### IV. SOCIOS SUSY DE PRIMER ORDEN

La generación de socios SUSY de primer orden del OI puede realizarse para cualquier función de transformación  $u_1$  de manera que la función de onda creada (9) no sea singular. Sin embargo, se puede presentar el caso de que las nuevas funciones no estén acotadas.

##### A. Función de transformación incidente desde la derecha

Si la función de transformación se elige como  $u_{\pm}$ , las expresiones del potencial generado, las soluciones propias transformadas y las creadas por la transformación SUSY son complicadas. A partir de (7), se obtiene

$$V_{1,\pm}(x) = \frac{x^2}{2} + 2\varepsilon_1 + \left(\frac{u'_{\pm}}{u_{\pm}}\right)^2, \quad (25)$$

y

$$V_{1,+}(-x) = V_{1,-}(x), \quad (26)$$

es decir, en una gráfica  $V_1(x)$  contra  $x$ , el eje vertical actúa como un espejo en el cual  $V_{1,+}(x)$  se refleja como  $V_{1,-}(x)$ . Por esta razón, solamente se reportarán resultados para partículas incidentes desde la derecha. Las Figs. 5 y 6 muestran el comportamiento típico de los socios 1-SUSY de  $V_0(x) = -\frac{x^2}{2}$  para valores específicos de la energía de factorización. La Fig. 7 muestra la densidad de probabilidad asociada al estado propio creado (9) por la transformación con la misma energía de factorización.

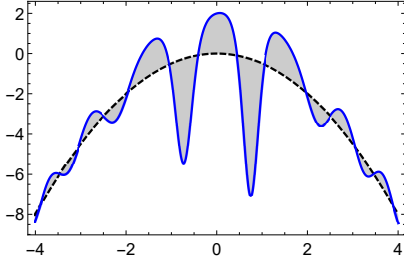


Fig. 5. Parte real del socio 1-SUSY  $V_{1,+}$  generado por la función de transformación  $u_+$  y energía  $\varepsilon_1 = 1 + \frac{3}{2}i$ . La línea discontinua representa la parte real del potencial inicial  $V_0 = -\frac{x^2}{2}$ .

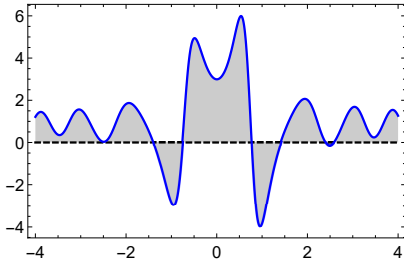


Fig. 6. Parte imaginaria del socio 1-SUSY  $V_{1,+}$  generado por la función de transformación  $u_+$  y energía  $\varepsilon_1 = 1 + \frac{3}{2}i$ . La línea discontinua representa la parte imaginaria del potencial inicial  $V_0 = -\frac{x^2}{2}$ .

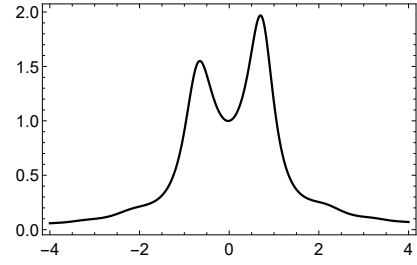


Fig. 7. Densidad de probabilidad no-normalizada  $\left|\frac{1}{u_+}\right|^2$  del estado propio creado por la transformación 1-SUSY con energía  $\varepsilon_1 = 1 + \frac{3}{2}i$ .

##### B. Función de transformación como una solución polinomial

En el caso real, la función de transformación no puede ser elegida como un estado excitado del sistema debido al teorema oscilatorio, resultando singularidades en los potenciales generados. La ausencia de un teorema análogo en el caso complejo permite elegir a la función de transformación como un estado propio del sistema eligiéndose ahora como las soluciones polinomiales (23b). Las expresiones del potencial transformado y las nuevas funciones propias están dadas por,

$$V_1(x) = -\frac{x^2}{2} + (2j+1)i + 4ij \left[ j \left( \frac{H_{j-1}}{H_j} \right)^2 - \sqrt{ix} \frac{H_{j-1}}{H_j} \right], \quad j = 2, 4, \dots \quad (27a)$$

$$\Psi_n(x) \propto e^{-i\frac{x^2}{2}} \left( j \frac{H_{j-1}}{H_j} H_n - n H_{n-1} \right), \quad (27b)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots; \quad j = 2, 4, \dots; \quad n \neq j,$$

en donde  $H_k := H_k(\sqrt{ix})$ . El índice  $j$  se restringe a valores enteros pares debido a que los potenciales (27a) son singulares en  $x = 0$  cuando  $j$  es impar; el valor  $j = 0$  conduce al caso trivial. Las Figs. 8 a 10 muestran el comportamiento del potencial (27a) y la densidad de probabilidad no-normalizada del estado creado por la transformación SUSY para  $j = 4$ . La

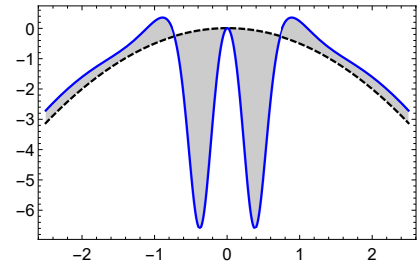


Fig. 8. Parte real del potencial (27a) generado por la función de transformación (23b) con  $j = 4$ . La línea discontinua representa la parte real del potencial inicial  $V_0 = -\frac{x^2}{2}$ .

generación de socios SUSY es ilimitada a partir de la función de transformación general (17) fijando el valor de la energía de factorización. Para estos mismos valores de la energía, se pueden obtener varias y diferentes jerarquías de las soluciones de la ecuación de Painlevé IV, como se reporta en [17].

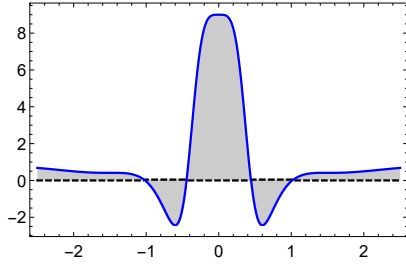


Fig. 9. Parte imaginaria del potencial (27a) generado por la función de transformación (23b) con  $j = 4$ . La línea discontinua representa la parte imaginaria del potencial inicial  $V_0 = -\frac{x^2}{2}$ .

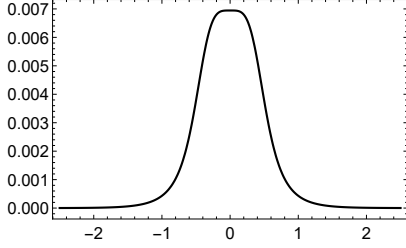


Fig. 10. Densidad de probabilidad no-normalizada del estado propio (9) creado por la transformación 1-SUSY y función (23b) con energía  $E_4 = \frac{9}{2}i$  correspondiente a  $j = 4$ .

## V. COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE LAS SOLUCIONES PROPIAS TRANSFORMADAS

En general, las soluciones formales de la ecuación de Schrödinger asociadas al OI no son de cuadrado-integrable. En la presente Sección se calcularán algunos valores de la energía tales que las funciones propias iniciales  $\psi(x)$  del sistema, y las correspondientes transformadas  $\tilde{\psi}(x)$ , cumplen con la cuadrado-integrabilidad o, al menos son acotadas. Para esto, la función de transformación más simple se elige como una función polinomial par del OI, a saber

$$u_1 = u(x, \varepsilon_1) = e^{-i\frac{x^2}{2}} \mathbf{H}_{2j}(\sqrt{i}x), \quad j = 1, 2, \dots, \quad (28)$$

la cual satisface  $hu_1 = \varepsilon_1 u_1$  en donde  $\varepsilon_1 = (2j + \frac{1}{2})i$ .

Las funciones propias iniciales son tales que,

$$-\left(\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{x^2}{2}\right) \psi(x) = E\psi(x), \quad (29a)$$

$$E = E_R + iE_I, \quad (29b)$$

en donde  $E_R$  y  $E_I$  representan la parte real e imaginaria de la energía  $E$ , respectivamente. La solución de (29a) está dada por (17) con los nuevos parámetros, es decir,

$$\psi(x) = e^{-i\frac{x^2}{2}} \left[ {}_1F_1\left(\frac{1}{4} + i\frac{E}{2}, \frac{1}{2}; ix^2\right) + Cx {}_1F_1\left(\frac{3}{4} + i\frac{E}{2}, \frac{3}{2}; ix^2\right) \right], \quad C \in \mathbb{C}. \quad (30)$$

El comportamiento asintótico de la función hipergeométrica confluyente  ${}_1F_1$  para  $|z| \rightarrow +\infty$  es

$${}_1F_1(a, b; z) \simeq \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} e^{i\pi a} z^{-a} + \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^z z^{a-b}. \quad (31)$$

Con la expresión anterior, se encuentra el comportamiento asintótico de la densidad de probabilidad (30):

$$|\psi(x)|^2 \simeq e^{-\frac{\pi}{2}E_R} \left| \Lambda_1 x^{-\frac{1}{2}-iE} + \Lambda_2 x^{-\frac{1}{2}+iE} e^{ix^2} \right|^2 \\ = e^{-\frac{\pi}{2}E_R} \left( |\Lambda_1|^2 |x|^{-1+2E_I} + |\Lambda_2|^2 |x|^{-1-2E_I} + \right. \\ \left. + \text{Re} \left[ \Lambda_1 \Lambda_2^* |x|^{-1-2iE_R} e^{-ix^2} \right] \right), \quad (32)$$

$$\Lambda_1 = \frac{\sqrt{\pi} i^{\frac{5}{4}}}{2\Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{E_R}{2}i\right)} \left[ \tan\left(\frac{\pi}{4}(1 + 2E_R i)\right) - 3i \right],$$

$$\Lambda_2 = -\frac{\sqrt{\pi} i^{\frac{3}{4}}}{2\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{E_R}{2}i\right)} \left[ \tan\left(\frac{\pi}{4}(1 + 2E_R i)\right) + 3i \right],$$

en donde  $(\alpha)^*$  denota el complejo conjugado de  $\alpha$ . Para asegurar que la densidad de probabilidad (32) decaiga lo suficientemente rápido en las fronteras del dominio del potencial, los exponentes de los dos primeros términos variables deben cumplir, simultáneamente, las desigualdades

$$-1 + 2E_I \leq 0, \quad -1 - 2E_I \geq 0, \quad (33a)$$

es decir,

$$-\frac{1}{2} \leq E_I \leq \frac{1}{2}. \quad (33b)$$

El término dentro de la parte real de (32) no representa un problema, por ser oscilante y decrecer como  $|x|^{-1}$ . Notar que la condición (33b) asegura un correcto decaimiento de la densidad de probabilidad para asignar una posible interpretación física, pero no garantiza la cuadrado-integrabilidad. Para esto, los dos primeros términos de (32) deben decaer más rápido que  $|x|^{-1}$  [2]. Sin embargo, imponiendo esta “condición fuerte”, no hay una solución común de las desigualdades (33a), por lo que es imposible encontrar funciones propias de cuadrado-integrable del OI.

Notar que las funciones propias estándar del OI, cuyas energías son reales, cumplen la restricción encontrada, por lo que las correspondientes densidades de probabilidad no divergen en las fronteras de su dominio.

Ahora, se analiza el comportamiento asintótico de las soluciones propias transformadas, cuya expresión general es

$$\tilde{\psi}(x) \propto \frac{W(u_1, \psi(x))}{u_1}, \quad (34)$$

en donde  $u_1$  es la solución polinomial par del OI dado por (28). Sustituyendo la expresión de  $u_1$ ,  $\psi(x)$  y el comportamiento asintótico (31), la densidad de probabilidad (34) es,

$$\left| \tilde{\psi}(x) \right|^2 \simeq e^{-\frac{\pi}{2}E_R} \left\{ |\mathcal{C}_1|^2 |x|^{-3+2E_I} + |\mathcal{C}_2|^2 |x|^{-3-2E_I} + \right. \\ \left. + |\mathcal{C}_3|^2 |x|^{1-2E_I} + 2\text{Re} \left[ \mathcal{C}_2 \mathcal{C}_3^* \right] |x|^{-1-2E_I} + \right. \\ \left. + 2\text{Re} \left[ \mathcal{C}_1 e^{-ix^2} \left( \mathcal{C}_2^* |x|^{-3-2iE_R} + \mathcal{C}_3^* |x|^{-1-2iE_R} \right) \right] \right\}, \\ \mathcal{C}_{1,2,3} \in \mathbb{C}. \quad (35)$$

El correcto decaimiento de la densidad de probabilidad ocurre cuando los exponentes de los primeros cuatro términos de (35) cumplen simultáneamente las desigualdades

$$\begin{aligned} -3 + 2E_1 &\leq 0, & -3 - 2E_1 &\leq 0, \\ 1 - 2E_1 &\leq 0, & -1 - 2E_1 &\leq 0, \end{aligned} \quad (36a)$$

cuya solución común es

$$\frac{1}{2} \leq E_1 \leq \frac{3}{2}. \quad (36b)$$

Los términos dentro de la parte real de (35) no son de cuadrado-integrable debido a que las partes reales de sus exponentes no decaen lo suficientemente rápido en el límite fijo. La condición de cuadrado-integrabilidad aplicada a (35), no permite encontrar una solución común a las desigualdades, por lo que no es posible determinar funciones propias del OI cuando se implementa una transformación 1-SUSY, excepto la creada por la propia transformación.

Notar que si  $E = E_R$ , la solución propia transformada  $\tilde{\psi}(x)$  no es acotada porque  $E_1 = 0$  viola la condición (36b), por lo que se destruye el espectro del Hamiltoniano inicial. A cambio se crea una banda de energía definida por (36b), en donde existen soluciones propias del Hamiltoniano estando en la frontera externa del espacio de Hilbert, es decir, decaen a cero pero no son de cuadrado-integrable.

Ahora, si la densidad de probabilidad de las soluciones propias iniciales y las correspondientes transformadas son acotadas, según las condiciones (33b) y (36b), las energías deben cumplir,

$$E = E_R + \frac{i}{2}, \quad E_R \in \mathbb{R}. \quad (37)$$

Las Figs. 11 y 12 muestran la densidad de probabilidad inicial (30) y transformada (34) de los estados propios en campo cercano. Las gráficas corresponden a energía puramente real y “energía” dada por (37), respectivamente.

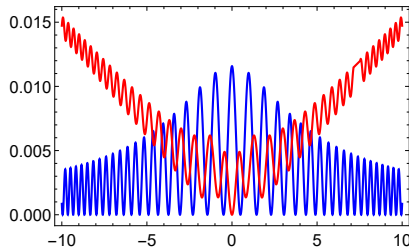


Fig. 11. Comparación entre las densidades de probabilidad no-normalizadas del estado propio inicial (azul) y el transformado (rojo) del OI en campo cercano. La energía es puramente real  $E = 2.8$  perteneciendo al espectro del sistema. La función semilla es  $u_1 = e^{-ix^2/2}H_2(\sqrt{i}x)$ .

Se ha mostrado la imposibilidad de encontrar *funciones propias* de cuadrado-integrable del OI por tratarse de un sistema dispersivo. Sin embargo, la novedad es el hallazgo de energías de factorización para los cuales las soluciones propias se comportan como funciones propias reales,

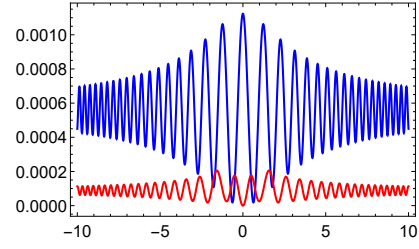


Fig. 12. Comparación entre las densidades de probabilidad no-normalizadas del estado propio inicial (azul) y el transformado (rojo) del OI en campo cercano. La “energía” no pertenece al espectro del sistema tomándose como  $E = 2.8 + \frac{1}{2}i$ . La función semilla es  $u_1 = e^{-ix^2/2}H_2(\sqrt{i}x)$ .

aunque el espectro no se conserva cuando se implementa la transformación 1-SUSY no singular.

Finalmente, las partículas que inciden desde  $x \rightarrow +\infty$  hacia la barrera con energía  $E \gg 0$  pasarán sin enterarse de que en  $x = 0$  existe el máximo de un potencial dispersivo. Dicho pico se notará cada vez más, a medida que la energía disminuye, pero manteniéndose positiva, manifestándose como una asimetría en la densidad de probabilidad ya que parte de ella es reflejada y parte transmitida. En la Fig. 13 se observa este comportamiento. Por otro lado, cuando la energía es negativa las partículas colisionan contra la barrera y existe una pequeña probabilidad de atravesarla. La asimetría es ahora muy marcada, como se aprecia en la Fig. 14. Las funciones

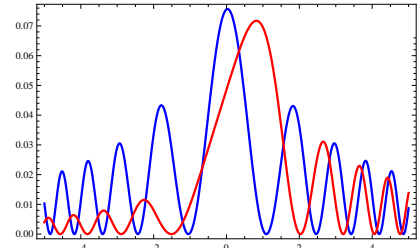


Fig. 13. Densidad de probabilidad no-normalizada de las soluciones propias del OI cuando las partículas inciden desde la derecha. Para  $E > 0$ , las partículas superan fácilmente al potencial dispersivo cuyo máximo se encuentra en  $x = 0$ . Se toma  $E = 1$  (azul) y  $E = 0.1$  (rojo).

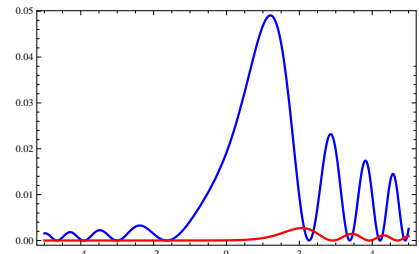


Fig. 14. Densidad de probabilidad no-normalizada de las soluciones propias del OI cuando las partículas inciden desde la derecha. Para  $E < 0$ , las partículas tienen una pequeña probabilidad de atravesar la barrera. Se toma  $E = -0.1$  (azul) y  $E = -1$  (rojo).

propias transformadas de las Figs. 13-14 se comportan de una



manera similar con la única, pero importante diferencia de que no son acotadas por arriba. Ver Figs. 15 y 16.

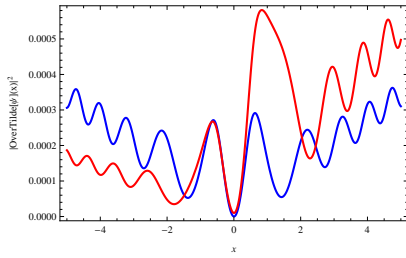


Fig. 15. Densidad de probabilidad no-normalizada de las soluciones propias transformadas correspondientes a las mostradas en la Fig. 13. Se ha tomado  $E = 1$  (azul) y  $E = 0.1$  (rojo).

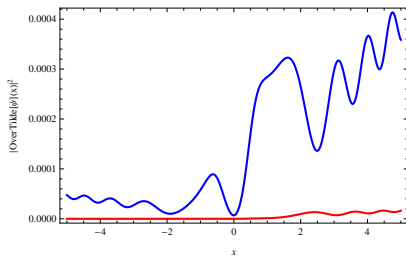


Fig. 16. Densidad de probabilidad no-normalizada de las soluciones propias transformadas correspondientes a las mostradas en la Fig. 14. Se ha tomado  $E = -0.1$  (azul) y  $E = -1$  (rojo).

## VI. CONCLUSIONES

En este trabajo se empleó la mecánica cuántica supersimétrica de primer orden para generar nuevos potenciales analíticos partiendo del oscilador invertido. El caso más ilustrativo surge cuando la función semilla se elige como una solución polinomial de la ecuación estacionaria de Schrödinger asociada al sistema, obteniéndose expresiones simples tanto para los nuevos potenciales como las soluciones propias transformadas.

Un resultado novedoso y sorprendente es que para el oscilador invertido se encontraron estados con “energías complejas” cuya densidad de probabilidad no es de cuadrado-integrable, pero son acotadas. Lo mismo ocurre para los estados propios transformados del nuevo Hamiltoniano cuando se ejecuta una transformación supersimétrica de primer orden no singular. El resultado es impresionante debido a que se trata de un sistema dispersivo cuya característica principal es la divergencia de sus estados propios.

## AGRADECIMIENTOS

J.C.G.L. agradece el apoyo del Tecnológico de Estudios Superiores de Huixquilucan para la realización de esta investigación.

## REFERENCES

- [1] David J. Fernández C. and J. C. González. “Complex oscillator and Painlevé IV equation”. *Ann. Phys.* 359 (2015) 213-229.
- [2] Kurt Bernardo Wolf. “El oscilador repulsivo”. *Rev. Mex. Fís. E* 56 (2010) 83-91.
- [3] David Bermudez and David J. Fernández C. “Factorization method and new potentials from the inverted oscillator”. *Ann. Phys.* 333 (2013) 290-306.
- [4] Barton G. “Quantum mechanics of the inverted oscillator potential” *Ann. Phys.* 166 (1986) 322-363.
- [5] S. Baskoutas and A. Jannussis. “Quantum tunnelling effect for the inverted Caldirola-Kanai Hamiltonian”. *J. Phys. A: Math. Gen.* 25 (1992) L1299.
- [6] S. Baskoutas, A. Jannussis and R. Mignani. “Quantum tunnelling of a damped and driven, inverted harmonic oscillator”. *J. Phys. A: Math. Gen.* 26 (1993) 7137.
- [7] Guang-Jie Guo, Zhong-Zhou Ren, Guo-Xing Ju and Xiao-Yong Guo. “Quantum tunneling effect of a time-dependent inverted harmonic oscillator”. *J. Phys. A: Math. Theor.* 44 (2011) 185301.
- [8] Guang-Jie Guo, Zhong-Zhou Ren, Guo-Xing Ju and Xiao-Yong Guo. “Quantum tunneling effect of a driven inverted harmonic oscillator”. *J. Phys. A: Math. Theor.* 44 (2011) 305301.
- [9] D.M. Brink and U. Smilansky. “Multiple reactions in the path-integral approach to barrier penetration”. *Nucl. Phys. A* 405 (1983) 301-312.
- [10] N. AbuSalbi, D.J. Kouri, Michael Baer and Eli Pollak. “A study of the quantal time delay matrix in collinear reactive scattering”. *J. Chem. Phys.* 82 (1985) 4500.
- [11] Gary Felder, Andrei Frolov, Lev Kofman and Andrei Linde. “Cosmology with negative potentials”. *Phys. Rev. D* 66 (2002) 023507.
- [12] A. A. Andrianov, M. V. Ioffe, F. Cannata and J. P. Dedonder. “SUSY quantum mechanics with complex superpotentials and real energy spectra”. *Internat J. Mod. Phys. A* 14 (1999) 2675-2688.
- [13] J.M. Carballo, David J. Fernández C., J. Negro and L.M. Nieto. “Polynomial Heisenberg algebras”. *J. Phys. A* 37 (2004) 10349-10362.
- [14] M.M. Nieto. “Relationship between supersymmetry and the inverse method in quantum mechanics”. *Phys. Lett. B* 145 (1984) 208-10.
- [15] S. Flügge. “Practical quantum mechanics”. Springer, Ed. 1994.
- [16] A. Ballesteros, F.J. Herranz and P. Parashar. “Quantum Heisenberg-Weyl algebras”. *J. Phys. A* 30 (1997) L149-L154.
- [17] David Bermudez and David J. Fernández C. “Supersymmetric quantum mechanics and Painlevé equations” *AIP Conf. Proc.* 1575 (2014) 50.