

Estimación de Picos Espectrales con FFT e Interpolación Cuadrática

Itzel S. Castillo García, Gordana Jovanovic Dolecek
Department of Electronics
Institute INAOE
Puebla, Mexico
itzelcastillo@inaoep.mx, gordana@ieee.org

Abstract— Este artículo presenta la estimación de picos espectrales a través del método de interpolación cuadrática de la transformada Fourier rápida (QIFFT por sus siglas en inglés) e interpolación cuadrática. Se detalla de manera específica el cálculo de la amplitud y frecuencia espectral para señales simples con ruido blanco añadido y comparan las desviaciones de las estimaciones para cada función de ventaneo con factores de relleno de ceros menor a 5.

Keywords— picos espectrales, estimación de frecuencia, interpolación cuadrática.

I. INTRODUCCION

La transformada de Fourier de una señal consiste en espaciar sus componentes en el dominio de la frecuencia. El tamaño de los intervalos entre líneas espectrales (Bins) depende de la cantidad de datos muestreados y en ocasiones los componentes de la señal pueden caer entre dos frecuencias armónicas adyacentes, por lo que no es posible asignar una amplitud a cada frecuencia del eje real. Esto es conocido como el efecto valla cuya solución es el relleno de ceros después de la señal ventaneada [1],[2].

Sin embargo lograr un sesgo del 0.1% en la estimación de la amplitud espectral usando relleno de ceros, requiere un factor de rellenos de ceros igual a 1000, [3]. Esto implica un alto costo computacional debido que la longitud de la FFT está dada por la relación

$$N=LM \quad (1)$$

donde:

N es la longitud de la transformada

L el factor de relleno de ceros

M es la longitud de la ventana

Para mejorar la eficiencia computacional, es necesario reducir el factor L . Uno de los métodos híbridos de mayor eficiencia para la búsqueda de picos y la estimación de parámetros espectrales es la transformada Fourier rápida interpolada cuadráticamente (QIFFT, por sus siglas en inglés). En este método se conjuga el relleno de ceros en el dominio del tiempo (interpolación ideal en el dominio de la frecuencia), seguido de la interpolación cuadrática de la

magnitud espectral [2,3], la cual reemplaza el lóbulo principal de la ventana por un polinomio cuadrático.

Aún con la interpolación cuadrática se genera un sesgo, entre el pico verdadero y la parábola ajustada. El único caso donde no se genera este sesgo es en la ventana Gaussiana que tiene una transformada de forma parabólica. En la siguiente sección se expondrá la relación entre el rellenos de ceros y la máxima desviación.

II. ALGORITMO PARA LA ESTIMACIÓN DE LA AMPLITUD ESPECTRAL

El método QIFFT se puede resumir en 2 etapas.

Etapas 1:

Realizar la transformada de Fourier de una señal ventaneada con factor de relleno de ceros adecuado mostrado en las tablas I y II.

En Matlab el relleno de ceros se realiza con la siguiente función.

$$fft(x.*w',N) \quad (2)$$

donde x , es la señal de entrada, w es la función de ventana y N la longitud de la transformada.

La tabla I presenta el mínimo factor L requerido para un sesgo menor a 1% en la estimación de la frecuencia, utilizando las ventanas de la familia Blackman-Harris. Donde,

$$Bias_{\omega} = |\omega - \omega_0| \times (M/2\pi) \quad (3)$$

$$\omega = Bin \text{ esperado} \times (fs/N). \quad (4)$$

$$\omega_0 = Bin \text{ real} \times (fs/1000M). \quad (5)$$

El Bin estimado se obtiene de la ecuación (13) explicada más adelante mientras que el Bin real es la ubicación del pico espectral formado por una transformada de Fourier cuyo factor $L=1000$, fs representa la frecuencia de muestreo en Hertz y M es la longitud de la ventana.

TABLA I. FACTOR L PARA LA ESTIMACIÓN DE LA FRECUENCIA

Sesgo Máximo	Ventanas Blackman-Harris			
	Rect	Hann	Hamm	Black
1.00%	2.1	1.2	1.2	1.0
0.50%	2.5	1.5	1.5	1.1
0.10%	4.1	2.4	2.4	1.9
0.01%	8.7	5.0	5.1	4.0

La tabla II presenta el mínimo factor requerido para un sesgo menor a 1% en la estimación de la Amplitud, usando las funciones de ventanas Blackman-Harris, donde

$$Bias_A = |A - A_0| / A_0 \quad (6)$$

A es la amplitud en dB obtenida de la ecuación (14) y A_0 es la amplitud real en dB del pico espectral de una transformada con $N = 1000 \times M$.

TABLA II. FACTOR L PARA LA ESTIMACIÓN DE LA AMPLITUD

Sesgo Máximo	Ventanas Blackman-Harris			
	Rect	Hann	Hamm	Black
1.00%	2.6	1.4	1.4	1.1
0.50%	3	1.6	1.7	1.2
0.10%	4.3	2.2	2.4	1.8
0.01%	7.5	3.8	4.2	3.1

Etapa 2:

Encontrar el bin x_{max} en el que se encuentra el pico con máxima amplitud espectral (dB) y las dos muestras vecinas x_{max-1} y x_{max+1} con sus correspondientes magnitudes. Para encontrar estas muestras en Matlab se utiliza la función:

$$[y1, x1] = \max(X); \quad (7)$$

$y1$ es la máxima magnitud (dB) y $x1$ es la ubicación del pico en Bins.

$$X = 20 * \log_{10}(\text{abs}(\text{fft}(x, N))); \quad (8)$$

Para la búsqueda de las muestras vecinas en Matlab utilizamos la siguiente expresión.

$$x0 = x1 - 1; y0 = X(x0); x2 = x1 + 1; y2 = X(x2); \quad (9)$$

Interpolación de un polinomio cuadrático de la forma $y(x) = ax^2 + bx + c$, con las muestras consecutivas $[x0, y0]$, $[x1, y1]$ y $[x2, y2]$. Los índices a , b y c están dados por las siguientes ecuaciones.

$$a = -\frac{y0 - 2(y1) + y2}{(x0)^2 - 2(x1)^2 + (x2)^2} \quad (10)$$

$$b = \frac{y2 - y0 - a[(x2)^2 - (x0)^2]}{2} \quad (11)$$

$$c = y0 - b(x0) - a(x0)^2 \quad (12)$$

Según las generalidades de la parábola, las coordenadas del pico se hallan por las siguientes ecuaciones:

$$\text{Bin estimado} = -b/2a \quad (13)$$

$$A = c - b^2/4a \quad (14)$$

III. COMPROBACIÓN DEL ALGORITMO A TRAVÉS DE LA SIMULACIÓN DE UNA SEÑAL SIMPLE

Se eligió una señal,

$$x(n) = A \cos(\omega n) + v(n), \quad n = 0, 1, \dots, M-1 \quad (15)$$

donde A es la amplitud, ω la frecuencia, $v(n)$ ruido blanco. Señal es ventaneada por cualquiera de las funciones presentadas en la Tabla 3:

$$s(n) = x(n)w(n) \quad (16)$$

La FFT aplicada a la señal ventaneada tiene una longitud de $N = LM$.

$$X(\omega) = \text{FFT}(\text{ZeroPadd}(s(n))) \quad (17)$$

A. Especificaciones de la señal A.

Sea una señal sinusoidal con la forma de la ecuación (15) con $f_s = 1000$, $M = 1000$, $\omega = 40.5$.

La figura 1 presenta la comparación de los lóbulos interpolados de la FFT de una señal ventaneada con la función Hanning y usando los factores $L = 1.2, 1.5, 2, 3$, el lóbulo real (líneas punteadas) es obtenido de usar una longitud $N = 1000 \times M$.

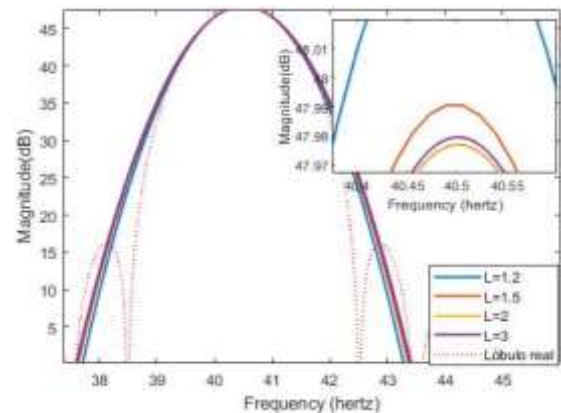


Fig.1 Comparación de los lóbulos interpolados de la señal A por la ventana Hanning.

La tabla 3 muestra los errores porcentuales explicados en la ecuación (3), con los datos obtenidos de la simulación de una sinusoidal con ruido blanco añadido y ventaneada por distintas funciones con los factores recomendados en la tabla I. A diferencia de la tabla I, estos resultados se muestran para el caso específico de la señal simple y añaden la ventana Bartlett.

TABLA III. SESGOS EN LA ESTIMACIÓN DE LA FRECUENCIA DE LA SEÑAL A

Ventana	L=1.2	L=1.5	L=2	L=3	
Rect	0.7%	0.75%	0.02%	0.06%	
Hann	0.18%	0.04%	0.02%	0.005%	
Hamm	0.3%	0.07%	1.4E-7%	0.02%	
Blackman	0.15%	0.072%	0.02%	0.024%	
Bartlett	0.0031%	5E-4%	5E-9%	8E-5%	
Kaiser	1.5	6E-3%	8E-4%	2E-8 %	1.4E-4%
	2	5E-3%	7E-4%	7E-8%	1.8E-4%
	2.5	4E-3%	6.4E-4%	2.6E-8%	1E-4%

Así mismo la tabla 4 presenta los sesgos entre la amplitud estimada y la real descritos por la ecuación (6).

TABLA IV. SESGOS EN LA ESTIMACIÓN DE LA AMPLITUD DE LA SEÑAL A

Ventana	L=1.2	L=1.5	L=2	L=3	
Rect	4.05%	4.9%	0.47%	0.45%	
Hann	0.85%	0.57%	0.00%	0.0%	
Hamm	1.05%	0.49%	0.00%	0.33%	
Blackman	0.48%	0.067%	0.00%	0.00%	
Bartlett	1.487%	1.015%	0.2093%	0.1823%	
Kaiser	1.5	1.146%	0.645%	0.16%	0.144%
	2	2.2%	1.343%	0.1623%	0.1344%
	2.5	2.086%	1.316%	0.228%	0.216%

B. Especificaciones para la señal B.

Sea una señal sinusoidal con la forma de la ecuación (15) y $f_s=1000$, $M=500$, $\omega=40.5$.

La siguiente figura muestra una comparación entre los lóbulos interpolados y el real (líneas punteadas), como se puede observar, la parábola resultante de L=3 tiene una mayor aproximación.

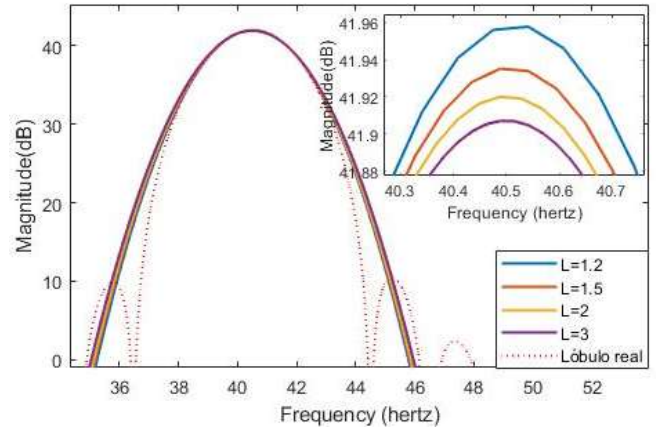


Fig.2. Comparación de los lóbulos interpolados de la señal B ventaneada por la función Hanning.

La tabla 5 al igual que la tabla 3 muestra un sesgo porcentual obtenido por la ecuación (3) y de la simulación de la señal B con distintas funciones de ventaneo. Observe que ahora $M_B=2M_A$, lo que impactará en la resolución de la señal, aun cuando esta sea una señal simple.

TABLA V. SESGOS EN LA ESTIMACIÓN DE LA FRECUENCIA DE LA SEÑAL B

Ventana	L=1.2	L=1.5	L=2	L=3	
Rect	2.8%	5%	0.16%	0.21%	
Hann	1.53%	0.74%	0.183%	0.12%	
Hamm	1.4%	0.614%	0.074%	1.3E-04%	
Blackman	0.39%	0.093%	0.13%	0.17%	
Bartlett	2%	0.8%	0.12%	0.03%	
Kaiser	1.5	3.04%	1.25%	0.16 %	0.032%
	2	0.003%	0.002%	7.5E-04%	4.7E-05%
	2.5	1.9%	0.51%	0.4%	0.55%

De la misma manera a la tabla 4, la tabla 6 muestra los sesgos en la amplitud estimada de la señal B, para las diferentes ventanas presentadas con factor L distinto.

TABLA VI. SESGOS EN LA ESTIMACIÓN DE LA AMPLITUD DE LA SEÑAL B

Ventana	L=1.2	L=1.5	L=2	L=3	
Rect	0.0085%	0.021%	0.058%	0.00024%	
Hann	0.0013%	0.0007%	3.2E-04%	1.8E-05%	
Hamm	0.0015%	0.00085%	4.1E-04%	2.5E-05%	
Blackman	0.0004%	2.3E-04%	1.12E-04%	9E-06%	
Bartlett	0.0022%	0.012%	0.53E-04%	3E-05%	
Kaiser	1.5	0.0039%	0.002%	0.0009%	4.8E-05%
	2	2.3%	0.66%	0.33%	0.48%
	2.5	0.003%	0.014%	6.4E-04%	4.3E-05%

C. Especificaciones para la señal C

Sea una señal sinusoidal con la forma de la ecuación (15) y $f_s=1000$, $M=250$, $\omega=40.5$.

La figura 3 presenta la comparación de los lóbulos interpolados para la FFT de la señal C con distintos factores L y ventaneada por la función Hanning.

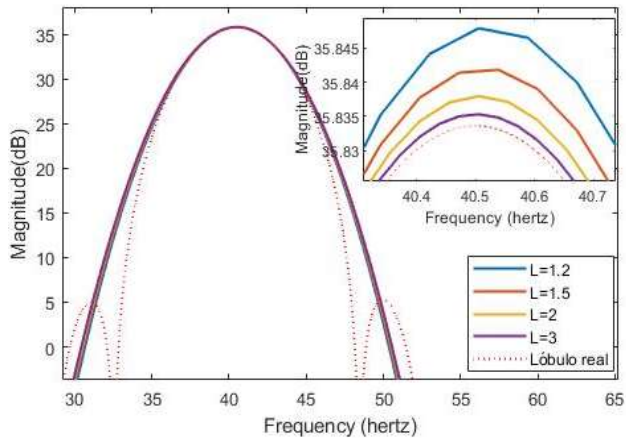


Fig.3. Comparación de los lóbulos interpolados de la señal C, ventaneada por la función Hanning.

En la tabla 7 se muestran los sesgos obtenidos de la simulación de la señal C con cada tipo de ventana presentada y factor de relleno respectivo.

TABLA VII. SESGOS EN LA ESTIMACIÓN DE LA FRECUENCIA DE LA SEÑAL C

Ventana	L=1.2	L=1.5	L=2	L=3	
Rect	16.9%	6.2%	3.5%	2.23%	
Hann	1.1%	0.65%	0.34%	0.14%	
Hamm	0.96%	0.74%	0.6%	0.5%	
Blackman	0.94%	0.77%	0.64%	0.55%	
Bartlett	1.6%	1.1%	0.78%	0.55%	
Kaiser	1.5	2.6%	1.7%	1.13 %	0.8%
	2	2.12%	1.3%	0.76%	0.44%
	2.5	1.1%	0.35%	0.13%	0.43%

Igualmente la tabla 8 presenta los sesgos obtenidos de las amplitudes estimadas por la interpolación cuadrática de la FFT de la señal C, con distintos factores de relleno de ceros para cada una de las ventanas mostradas.

TABLA VIII. SESGOS EN LA ESTIMACIÓN DE LA AMPLITUD DE LA SEÑAL C

Ventana	L=1.2	L=1.5	L=2	L=3	
Rect	0.028%	0.005%	0.002%	0.0006%	
Hann	0.0004%	2.4E-04%	1.2E-04%	4.8E-05%	
Hamm	3.2E-04%	1.9E-04%	10E-05%	4E-05%	
Blackman	1.4E-04%	8.7E-05%	4.7E-05%	1.9E-05%	
Bartlett	6.2E-04%	3.6E-04%	1.8E-04%	7.3E-05%	
Kaiser	1.5	0.0012%	6.3E-04%	3E-04 %	1.2E-04%
	2	9.7E-04%	5.3E-04%	2.6E-04%	10E-05%
	2.5	8E-04%	4.4E-04%	2.2E-04%	8.4E-05%

IV. CONCLUSIONES

El método QIFFT logra máxima verosimilitud para señales simples. En la tabla 3 y 4 las ventanas Hanning y Blackman arrojan valores insesgados para un relleno de ceros de 2 y $M=1000$, mientras que cuando reducimos $M/2$ los sesgos en el cálculo de la frecuencia son hasta 5 veces más grandes. Por otra parte la amplitud tiene menor error de estimación y lo mismo podemos observar cuando se reduce $M/4$, el error de estimación es mucho mayor, esto se debe a que el ancho del lóbulo principal aumenta proporcionalmente a la disminución de la longitud de la ventana [6]. No se puede decir que el sesgo aumento debido a interferencias ya que no había una segunda sinusoidal agregada pero el método QIFFT es menos confiable cuando los picos espectrales de las ventanas están separados por menos de la mitad del ancho del lóbulo principal.

De las figuras 1,3 y 4, se observa que en ancho entre los cruces por ceros del lóbulo principal es más ancho a medida que disminuye la longitud de la ventana y permite que la curva del polinomio interpolado tenga menor sesgo en el eje ω .

REFERENCIAS

- [1] E. & J. B. W. Ifeachor, "Digital Signal processing: a practical approach," Pearson Education., 2002, pp. 583-591.
- [2] J. I. Smith, "ccrma.stanford.edu/~jos/sasp/Spectrum_Analysis_Sinusoids.html," 2011. [En línea].
- [3] J. S. I. M Abe, "Design criteria for simple sinusoidal parameter estimation based on quadratic interpolation FFT magnitude peaks," de *Audio Engineering Society Convention 117*, San Francisco, CA, USA, Octubre, 2004.
- [4] J. O. Smith III y X. Serra, "PARSHL: An analysis/Sintesis Program for Non-Harmonic Sounds Based on a Sinusoidal Representation," de *ICMC*, Tokyo.
- [5] Shanglin Ye, Jiadong Sun and Elias Aboutanos, "On the Estimation of the Parameters of a Real Sinusoid in Noise," *IEEE Signal Processing Letters*, 2017, vol. 24, no 5, p. 638-642
- [6] Li R., Xuan J. y Shi T, "A frequency estimation method for two adjacent frequencies", *Measurement*, 2020, vol.157, p.107614
- [7] Matlab (Mathworks), 2020.