

Diseño de Compensadores de Filtro Comb de Banda Ancha Mediante el Método de Análisis de Intervalos

Sergio Alberto Salguero Luna
Departamento de Electrónica
Instituto INAOE
Puebla, México
salguero@inaoep.mx

Gordana Jovanovic Dolecek
Departamento de Electrónica
Instituto INAOE
Puebla, México
gordana@ieee.org

Abstract—El artículo presenta un diseño de compensador de filtro comb utilizando el método de análisis de intervalos. De esta forma, se logra una estructura sin multiplicadores y con mayor flexibilidad al variar el número de sumadores. En consecuencia, se presentó en breve, el método de análisis de intervalos de forma general y se explicaron los pasos involucrados en el desarrollo del compensador. Además, se describieron las elecciones de los parámetros de diseño y los resultados de éste se presentaron en una tabla. Asimismo, el método se ilustró con dos ejemplos. Finalmente, se hicieron comparaciones con métodos de la literatura.

Index Terms—filtro comb, compensador sin multiplicadores, análisis de intervalos

I. INTRODUCCIÓN

Dentro del campo de Procesamiento de Señales Digitales, una de las operaciones relacionadas con el cambio en la tasa de muestreo es conocida como decimación. El proceso se conforma por dos etapas, estando la primera de ellas representada por un filtro denominado filtro anti-aliasing o de decimación. Debido a que todos los coeficientes que lo conforman son uno, el filtro de decimación más simple se llama filtro comb, cuya función de transferencia es [1,2]:

$$H(z) = \left[\frac{1}{M} \frac{1 - z^{-M}}{1 - z^{-1}} \right]^K, \quad (1)$$

donde M es el factor entero de disminución en la tasa de muestreo consumada en la función de downsampling efectuada en la segunda etapa de la decimación. Además, K es el orden del filtro comb, y z es una variable compleja. Por consiguiente, de (1) se obtiene que la respuesta en magnitud del filtro comb está dada por [3]:

$$|H(e^{j\omega})| = \left| \frac{1}{M} \frac{\sin(\omega M/2)}{\sin(\omega/2)} \right|^K, \quad (2)$$

donde ω es la frecuencia digital.

La respuesta en magnitud (2) debe ser plana en la banda de paso, la cual está definida por la frecuencia de la banda de paso [4]:

$$\omega_p = \frac{\pi}{2M}. \quad (3)$$

Sin embargo, el filtro tiene una caída en la banda de paso y se necesita un filtro compensador, denotado como $G(z)$, que disminuya esta caída. El filtro compensador trabaja en baja frecuencia, es decir, después de la decimación. La función de transferencia del filtro comb compensado está dada por [3]:

$$H_C(z) = H(z)G(z^M), \quad (4)$$

donde $H(z)$ es la función de transferencia del filtro comb (1), mientras que $G(z^M)$ es la función de transferencia del filtro compensador a una tasa alta de muestreo (antes de la decimación). Como el filtro comb no tiene multiplicadores, es deseable que el filtro compensador sea también sin multiplicadores.

Durante los últimos años, diferentes compensadores sin multiplicadores han sido propuestos [3,5-7]. El compensador en [3] utiliza una respuesta en magnitud de compensador en forma de seno cuadrado y asegura una resultante desviación en la banda de paso menor a 0.4 dB. En [5,6] se emplea el método de análisis de intervalos basado en la minimización de la diferencia entre la máxima y mínima desviación en la banda de paso. Por otro lado, en [7] se utiliza el método de análisis de intervalos para diseño minimax y técnica de moldeado.

El propósito aquí es utilizar el método de análisis de intervalos para lograr más flexibilidad en el diseño del compensador en [3] variando el número de sumadores.

El contenido del artículo se organiza de la siguiente manera: la Sección II expone el método de análisis de intervalos y explica el diseño del compensador desarrollado en [3]. Las características y el funcionamiento del método propuesto se detallan en la Sección III. En la Sección IV se explica cómo establecer el valor de los parámetros involucrados. Por consiguiente, en la Sección V se lleva a cabo la discusión de los resultados y las comparaciones con otros compensadores del mismo nivel de complejidad.

II. MÉTODO DE ANÁLISIS DE INTERVALOS [8] Y COMPENSADOR [3]

A. Método de Análisis de Intervalos

Para el diseño de filtros FIR con fase lineal sin multiplicadores se puede emplear el análisis de intervalos, y de esta manera expresar los coeficientes del filtro en forma de suma de potencias de dos (SPT, por sus iniciales en inglés). Entonces se resuelve el siguiente problema de optimización [8]:

$$\mathbf{a}_{opt} = \arg \min_{\mathbf{a}} [\epsilon(\mathbf{a})], \quad (5)$$

donde \mathbf{a} es el vector de coeficientes del filtro en forma SPT, \mathbf{a}_{opt} es el vector óptimo de coeficientes obtenidos, mientras que ϵ es conocida como la función objetivo.

Primero se define un vector de trabajo \mathbf{X} , el cual contiene los límites inferior y superior que describen el intervalo de trabajo a lo largo de cada una de sus dimensiones. Además, se definen dos listas, una lista de entrada y una lista final, donde la lista de entrada será la que contenga a \mathbf{X} al comienzo del algoritmo. De manera breve, se describen cada uno de los pasos que conforman dicho procedimiento [8].

Paso 1: Se remueve \mathbf{X} de la lista de entrada.

Paso 2: Se calcula la extensión del intervalo de la función objetivo ϵ . Dependiendo de los límites del intervalo calculado, una de estas acciones es efectuada enseguida: actualización del límite superior, descartar \mathbf{X} del análisis posterior, insertar \mathbf{X} en la lista final o dividir \mathbf{X} en dos partes e insertarlas en la lista de entrada.

Paso 3: Si la lista de entrada no está vacía, se repiten los pasos 1 y 2.

En particular, para el diseño de un filtro comb compensado, la función objetivo en (5) adquiere la siguiente forma [9]:

$$\epsilon(\mathbf{a}) = \max_{|\omega| \leq \omega_p} |1 - H(e^{j\omega})G(\omega, \mathbf{a})|, \quad (6)$$

donde $H(e^{j\omega})$ y ω_p están dadas por (2) y (3), respectivamente, mientras que $G(\omega, \mathbf{a})$ es la función de transferencia del filtro compensador, la cual se define como:

$$G(\omega, \mathbf{a}) = a(0) + 2 \sum_{n=1}^{(N-1)/2} a(n) \cos(n\omega), \quad (7)$$

siendo N el número de coeficientes que conforman el compensador.

B. Método de Diseño en [3]

La respuesta en magnitud del filtro está dada por:

$$|G(e^{j\omega M})| = 1 + B \sin^2(\omega M/2), \quad (8)$$

donde B es la magnitud de la función sinusoidal presentada en forma SPT y M es el factor de decimación.

De (4), la respuesta en magnitud del filtro comb compensado es presentada como:

$$|H_C(e^{j\omega M})| = |H(e^{j\omega M})G(e^{j\omega M})|, \quad (9)$$

donde $G(e^{j\omega M})$ está dada por (8).

La función del sistema del filtro está representada como:

$$G(z) = 2^{-2} [(-1 + 2z^{-1} - z^{-2})B + 2^2 z^{-1}], \quad (10)$$

donde el parámetro B depende del parámetro K del filtro comb. En consecuencia, de (10) se deduce que la estructura requiera para su implementación tres sumadores, más los sumadores que necesite B .

De esta forma, el compensador en [3] está definido únicamente por el parámetro del filtro comb K y no requiere multiplicadores para su implementación. El filtro comb compensado tiene una desviación absoluta menor a 0.4 dB para todos los valores de K , donde K va de 1 hasta 5.

III. MÉTODO PROPUESTO

Aquí se va a utilizar el método de análisis de intervalos para el diseño del decimador en [3] con el objetivo de obtener mejor flexibilidad de diseño variando el número de sumadores para cada valor de K . El diseño posee cuatro parámetros: el orden del filtro K , el factor de decimación M , el número de coeficientes que conforman B denotado como Nc , y el número de bits L que describe el espacio de coeficientes en B . El método se describe en los siguientes pasos:

Paso 1: Como en [3] se divide la banda de paso en equidistantes fracciones $\Delta\omega$ de igual longitud. Se ha verificado mediante el método que de 50 intervalos en adelante, el resultado obtenido es independiente de dicho parámetro.

Paso 2: Se elige el espacio de trabajo, el cual queda representado por el espacio de coeficientes $c_i \in [-2^0, -2^{-1}, \dots, -2^{-L}, 0, 2^{-L}, \dots, 2^{-1}, 2^0]$, y se crea la matriz M_B . Las filas de la matriz son todas las combinaciones posibles entre los elementos que integran el espacio de coeficientes, tomando en cuenta la restricción de que el primero de éstos debe ser mayor o igual a cero. Por lo tanto, el número de filas r de la matriz es igual a:

$$r = (L + 2)(2L + 3)^{Nc-1}, \quad (11)$$

donde Nc es el número de coeficientes que conforman B y L es el número de bits que describe el espacio de coeficientes en B . Asimismo, el número de columnas de la matriz es igual a Nc .

Paso 3: Se calcula la respuesta en magnitud del filtro compensador (8) al emplear cada fila de la matriz M_B y se trata de minimizar la desviación en la banda de paso, denotada como δ_p , de la conexión en cascada del filtro compensador y el filtro comb tomando en cuenta todos los casos. En otras palabras, se calcula el valor mínimo del máximo valor absoluto de la respuesta en magnitud del filtro comb compensado (9) en decibeles (dB).

En consecuencia, recibimos que el número total de sumadores que introduce el factor B es $Nc - 1$, resultando un acumulado de:

$$A = Nc - 1 + 3 = Nc + 2, \quad (12)$$

donde A es el número de sumadores que conformarán la estructura y Nc es el número de coeficientes que posee B .

La Fig. 1 muestra cómo va cambiando la magnitud característica conforme K varía de 1 a 6. Por su parte, la atenuación en la banda de rechazo se va incrementando al aumentar el valor de K , tal y como se esperaba. Conjuntamente requiere especial atención la región de la banda de paso, ya que al ver dicha figura, se puede observar que $\delta_p < 0,4$ dB con $A = 5$.

IV. DISCUSIÓN

En esta sección se describen las elecciones de los parámetros de diseño y se ilustran en dos ejemplos.

A. Elección de L

Cuando L adquiera valores menores a 12, los coeficientes obtenidos pueden llegar a sufrir modificaciones al variar este parámetro, por lo tanto, para asegurar que el cambio de L no influya en la desviación en la banda de paso, se debe establecer $L \geq 12$.

B. Elección de M

Haciendo simulaciones se recibió que para el valor de $M \geq 10$, los resultados presentados en la Tabla I no dependen de M , pero para $M < 10$, la desviación en la banda de paso

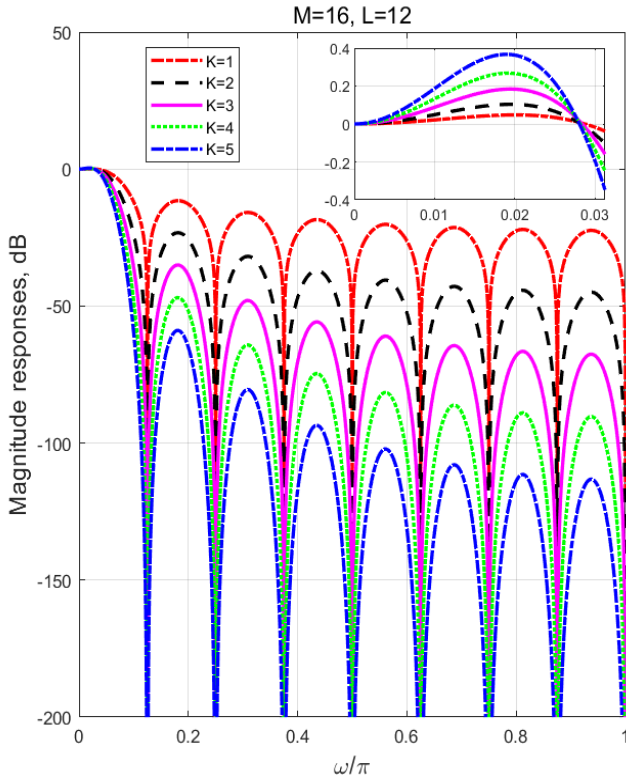


Figura 1. Respuesta en magnitud del filtro comb compensado para diferentes órdenes de filtro K . Los parámetros considerados son: el factor de decimación $M = 16$, el número de bits de resolución $L = 12$ y un total de 5 sumadores.

Tabla I
COMPENSACIÓN PARA ORDEN DE FILTRO $K = 1, 2, 3, 4, 5$, VARIANDO EL NÚMERO DE SUMADORES CON UN FACTOR DE DECIMACIÓN $M = 16$ Y NÚMERO DE BITS DE RESOLUCIÓN $L = 12$.

K	A	B	δ_p (dB)
1	3	2^{-2}	0.1429
	4	$2^{-2} - 2^{-5}$	0.0636
	5	$2^{-2} - 2^{-5} - 2^{-7}$	0.0477
	6	$2^{-2} - 2^{-5} - 2^{-7} - 2^{-9}$	0.0444
2	3	2^{-1}	0.2340
	4	$2^{-1} - 2^{-4}$	0.1052
	5	$2^{-1} - 2^{-4} - 2^{-10}$	0.1035
	6	$2^{-1} - 2^{-4} - 2^{-10} - 2^{-12}$	0.1031
3	3	2^{-1}	0.7826
	4	$2^0 - 2^{-2}$	0.2970
	5	$2^0 - 2^{-2} - 2^{-4}$	0.1840
	6	$2^0 - 2^{-2} - 2^{-4} - 2^{-8}$	0.1775
4	3	2^0	0.3431
	4	$2^0 - 2^{-5}$	0.2922
	5	$2^0 - 2^{-4} + 2^{-6}$	0.2677
	6	$2^0 - 2^{-4} + 2^{-6} - 2^{-8}$	0.2617
5	3	2^0	1.0128
	4	$2^0 + 2^{-2}$	0.3783
	5	$2^0 + 2^{-2} - 2^{-7}$	0.3668
	6	$2^0 + 2^{-2} - 2^{-6} + 2^{-8}$	0.3613

varía ligeramente para un determinado número de sumadores dados en dicha tabla, tal y como se muestra en el Ejemplo 1.

EJEMPLO 1: Los valores de los parámetros involucrados son: $K = 3$, $Nc = 3$ y $L = 12$, mientras que $M = 7$ para el primer caso, y $M = 20$ para un segundo caso.

Paso 1: Se calcula la respuesta en magnitud del filtro comb (2) en 64 puntos equidistantes que se encuentran dentro de la banda de paso dada por (3). El procedimiento sugiere que el número de puntos sea mayor a 50.

Paso 2: Considerando $L = 12$, implica que los elementos que conforman el espacio de coeficientes sean $[-2^0, -2^{-1}, \dots, -2^{-12}, 0, 2^{-12}, \dots, 2^{-1}, 2^0]$. Ahora bien, se contruye la matriz M_B , la cual contendrá una cantidad de columnas de $Nc = 3$ y de filas equivalente a $r = 10206$ (11). De acuerdo a las condiciones preestablecidas, los coeficientes de B serán tomados de alguna de las opciones que nos brinda M_B a través de sus filas.

Paso 3: Por último, se evalúan los 10206 valores distintos que puede adquirir B , para obtener aquéllos que arrojen una menor desviación en la banda de paso. El algoritmo indica que cuando $M = 7$, $B = 2^0 - 2^{-2} - 2^{-4}$ y $\delta_p = 0.2016$ dB. Por

otro lado, para $M = 20$ se obtuvo que $B = 2^0 - 2^{-2} - 2^{-4}$ y $\delta_p = 0.1825$ dB. Por (12), el número de sumadores es de 5 para ambos casos. Como podemos apreciar, hay una variación de alrededor del 10 por ciento en cuanto a los valores calculados de δ_p entre un caso y otro. La Fig. 2 muestra las respuestas en magnitud de ambos casos.

C. Variación de N_c

La Tabla I da a conocer la injerencia que tiene en los resultados el cambio de valor de N_c . Para proporcionar más detalles al respecto, se presenta el ejemplo 2.

EJEMPLO 2: Ahora vamos a mostrar el uso de la Tabla I con un ejemplo en donde $K = 4$, $M = 15$ y $L = 12$. El valor de N_c será de 2 para el primer caso y de 3 para un segundo caso.

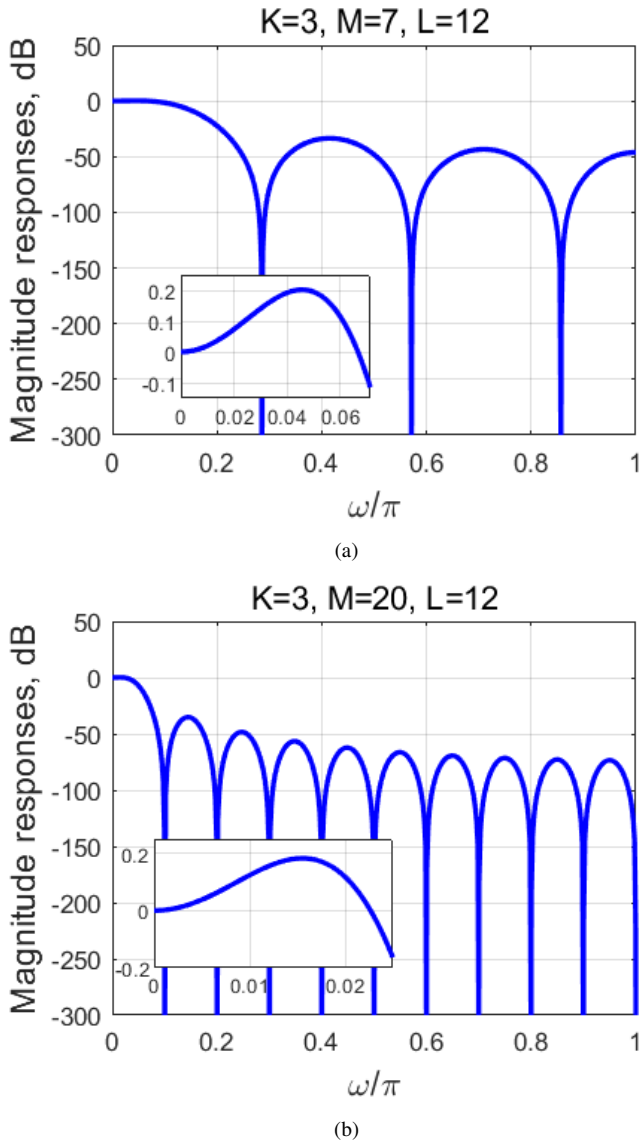


Figura 2. Respuesta en magnitud del filtro comb compensado para a) $M = 7$ y b) $M = 20$. Los parámetros son: el orden del filtro $K = 3$, el número de bits de resolución $L = 12$ y un total de 5 sumadores.

De la misma manera, procedemos a calcular la respuesta en magnitud del filtro comb (2) en 64 puntos equidistantes que se encuentran dentro de la banda de paso dada por (3). $[-2^0, -2^{-1}, \dots, -2^{-12}, 0, 2^{-12}, \dots, 2^{-1}, 2^0]$ conformarán el espacio de coeficientes. Para el primer caso, M_B posee $N_c = 2$ columnas y por (11) $r = 378$ filas. Por otro lado, M_B contiene $N_c = 3$ columnas y $r = 10206$ filas (11), representando el segundo caso. Tomando la información de la Tabla I, se recibe que $B = 2^0 - 2^{-5}$, $\delta_p = 0.2922$ dB y $A = 4$ para el primer caso, mientras que $B = 2^0 - 2^{-4} + 2^{-6}$, $\delta_p = 0.2677$ y $A = 5$ para el segundo caso. En la Fig. 3 se aprecian las respuestas en magnitud de ambos casos.

Analizando la Tabla 1 se puede observar que en general, conviene implementar por lo menos 5 sumadores, ya que la desviación en la banda de paso obtenida disminuye un porcentaje considerable con respecto a los resultados calculados que utilizan menos sumadores.

V. COMPARACIONES

El propósito de esta sección es comparar los resultados obtenidos por el método presentado en la Sección III con algunos reportados en la literatura que posean características similares entre sí.

A. Comparación con método [3]

El método en [3] sirvió como base para el desarrollo del algoritmo propuesto. Considerando las mismas condiciones para ambos métodos, entre ellas que $M = 16$, se obtuvieron los resultados que se observan en la Tabla II. Se puede ver del

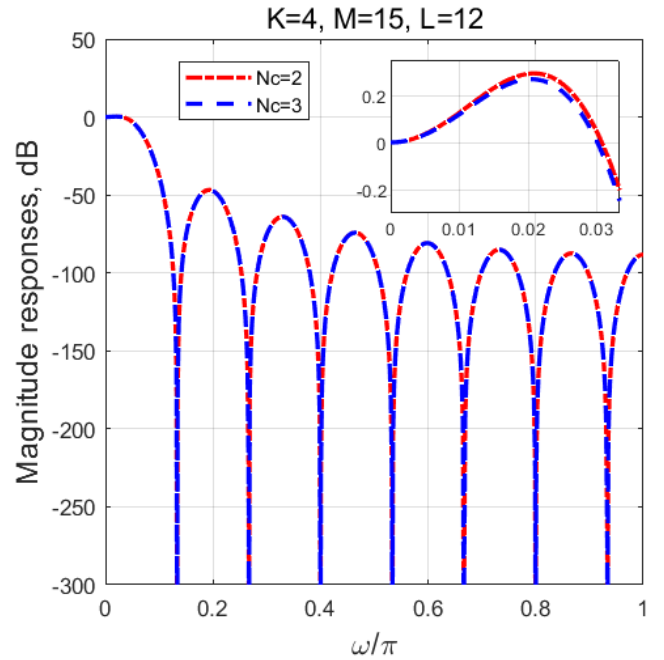


Figura 3. Respuesta en magnitud del filtro comb compensado variando el número de coeficientes N_c que conforman el factor B . Los parámetros considerados son: el orden del filtro $K = 4$, el factor de decimación $M = 15$ y el número de bits de resolución $L = 12$.

Tabla II
CUADRO COMPARATIVO ENTRE EL MÉTODO [3] Y EL MÉTODO PROPUESTO
PARA UN FACTOR DE DECIMACIÓN $M = 16$.

K	MÉTODO [3]		MÉTODO PROPUESTO	
	A	δ_p (dB)	A	δ_p (dB)
1	3	0.1429	4	0.0636
			5	0.0477
2	3	0.2340	4	0.1052
			5	0.1035
3	4	0.2970	5	0.1840
4	3	0.3431	4	0.2922
			5	0.2677
5	4	0.3783	5	0.3668

método propuesto, que se reduce la desviación en la banda de paso a cambio de incrementar el número de sumadores.

B. Comparación con método [9]

Se presenta la comparación con el método [9] debido a que también utiliza el método de análisis de intervalos. La comparación es presentada en la Tabla III para un factor de decimación $M = 32$ y considerando el mismo número de sumadores $A = 5$ en los dos métodos. Los resultados de la tabla muestran que en el algoritmo propuesto se obtiene una menor desviación en la banda de paso para todos los valores de K considerados. Para obtener la información mostrada en dicha tabla, se recurrió a (6) y a los coeficientes brindados en [9].

Los compensadores del método [9] y el propuesto están basados en (7) y (10), respectivamente, y por lo presentado en la Tabla III, podemos generarnos una idea de lo valioso que ha sido emplear y desarrollar aspectos de trigonometría durante este proceso.

VI. CONCLUSIONES

Este trabajo muestra que utilizando el método de intervalos se puede obtener flexibilidad en el diseño del filtro comb. De

esta manera, se puede variar el número de sumadores para cada valor del parámetro K del filtro comb de 1 a 5.

Las comparaciones con dos métodos de la literatura demuestran que es beneficioso el método propuesto.

REFERENCIAS

- [1] L. Milic, *Multirate Filtering for Digital Signal Processing: Matlab Applications*, IGP, Hershey, 2009.
- [2] E. B. Hogenauer, "An economical class of digital filters for decimation and interpolation," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. 29, no. 2, pp. 155–162, Apr. 1981.
- [3] G. J. Dolecek and A. F. Vázquez, "Trigonometrical approach to design a simple wideband comb compensator," *AEU Int. J. Electron. Comm.*, vol. 68, no. 5, pp. 437–441, May 2014.
- [4] G. J. Dolecek, *Advances in Multirate Systems*, Springer Int. Publishing, NY, 2018.
- [5] G. Molnar, A. Dudarin, and M. Vucic, "Design of multiplierless CIC compensators based on maximum passband deviation," in *Proc. IEEE Int. Convention MIPRO, Opatija, Croatia, May 2017*, pp. 127–132.
- [6] A. Dudarin, G. Molnar, and M. Vucic, "Simple multiplierless CIC compensators providing minimum passband deviation," in *Proc. Int. Symp. ISPA, Ljubljana, Slovenia, Sept. 2017*, pp. 70–73.
- [7] G. Molnar, A. Dudarin, and M. Vucic, "Minimax design of multiplierless sharpened CIC filters based on interval analysis," in *Proc. Int. Conf. MIPRO, Opatija, Croatia, 2016*, pp. 94–98.
- [8] M. Vucic, G. Molnar, and T. Zgaljic, "Design of FIR filters based on interval analysis," in *Proc. 33rd Int. Convention MIPRO, vol. MEET & GVS, Opatija, Croatia, May 2010*, pp. 197–202.
- [9] M. G. Pecotic, G. Molnar, and M. Vucic, "Design of CIC compensators with SPT coefficients based on interval analysis," in *Proc. IEEE Int. Convention MIPRO, Opatija, Croatia, May 2012*, pp. 123–128.

Tabla III
COMPARACIÓN ENTRE EL MÉTODO [9] Y EL MÉTODO PROPUESTO
EMPLEANDO 5 SUMADORES Y UN FACTOR DE DECIMACIÓN $M = 32$.

K	δ_p de Método [9] (dB)	δ_p de Método Propuesto (dB)
2	0.1282	0.1036
3	0.2933	0.1808
4	0.4067	0.2638
5	0.7163	0.3620